BSGG	Lehrgang: Informationsverarbeitung in IT-Systemen	Arbeitsblatt Nr. 11
	Thema: Schaltalgebra	Datum:
	Name:	Seite 1 von 4

Schaltalgebra

Die Anwendung der Booleschen Algebra zur Konstruktion digitaler Schaltungen geht auf den Mathematiker Claude Elwood Shannon[1] zurück. Hierzu wurde der Begriff „Schaltalgebra“ geprägt.

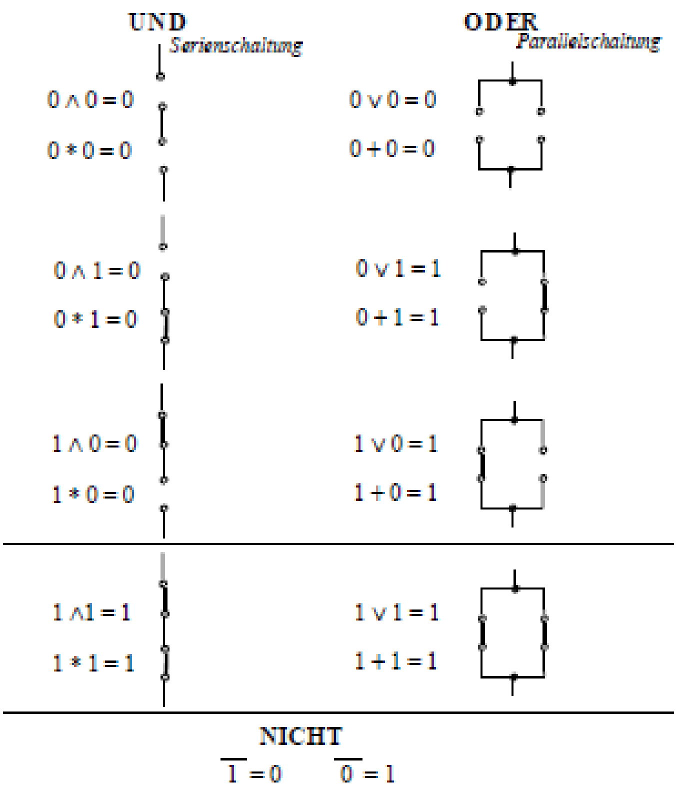
Mit den Regeln der Schaltalgebra oder Booleschen Algebra können binäre (zweiwertige) kombinatorische und sequenzielle Schaltungen berechnet und vereinfacht werden.

In binären Schaltanordnungen existieren nur die Werte „0“ und „1“. Diese beiden Werte lassen sich als einen elektrischen Schalter im Zustand „offen ≙ 0“ und „geschlossen ≙ 1“ darstellen.

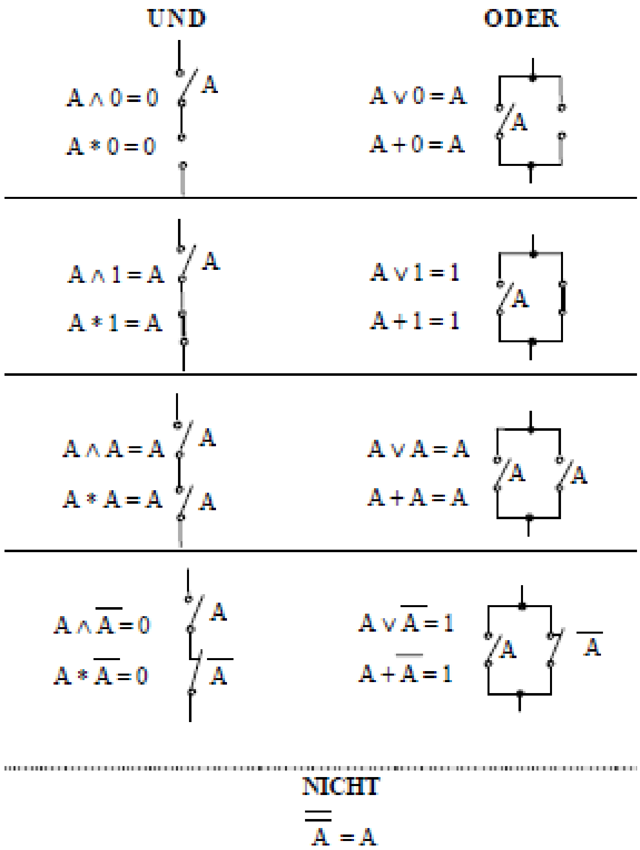
Die grundlegenden Operationen der Schaltalgebra sind das „ODER (OR)“, das „UND (AND)“ und das „NICHT (NOT)“.

Auf Variable bzw. Konstante können nun diese Operationen angewendet werden. Hierbei lässt sich die UND-Operation elektrisch als eine Reihenschaltung und die ODER-Operation als eine Parallelschaltung illustrieren[2]:

Verknüpfung zweier Konstanten



Verknüpfung Variable mit Konstante



1 In seiner Master-Abschlussarbeit „A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits“ aus dem Jahr 1937

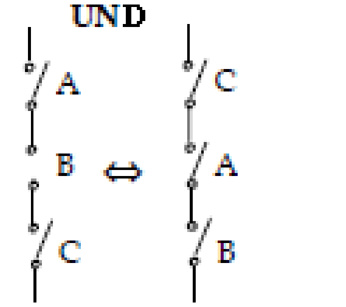
2 Darstellungen entnommen aus dem Vorlesungskript „Digitaltechnik“ von Prof. Dr. Tröster ETH Zürich `http://www.ee.ethz.ch/fileadmin/user_upload/d-itet/studium/maturandinneninfo/digitech_07.pdf am 23.02.2009`

Verknüpfungsgesetze

Aus der elementaren Algebra kennt man Verknüpfungsgesetze, die auch in der Schaltalgebra Gültigkeit haben:

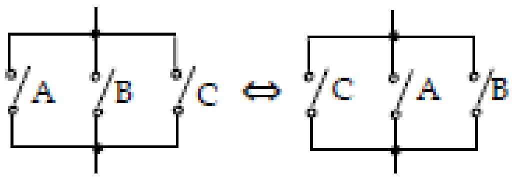
Vertauschungsgesetz (Kommutativ-Gesetz)

UND



$$Z = A \wedge B \wedge C = C \wedge A \wedge B$$

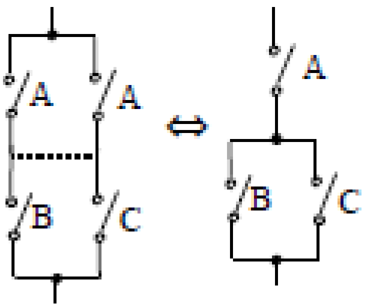
ODER



$$Z = A \vee B \vee C = C \vee A \vee B$$

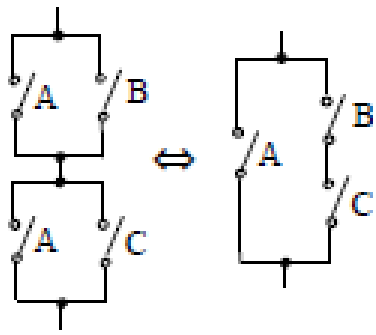
Verteilungsgesetz (Distributivgesetz)

konjunktiv



$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) = A \wedge (B \vee C)$$

disjunktiv



$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) = A \vee (B \wedge C)$$

Zuordnungsgesetz (Assoziativgesetz)

UND $Z = A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

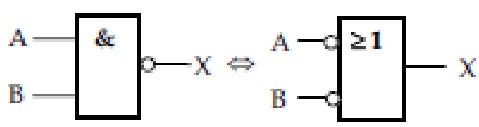
ODER $Z = A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

De Morgansches Theorem

Den Zusammenhang zwischen einer Konjuktion (UND- bzw. NAND-Verknüpfung) und einer Disjunktion (ODER- bzw. NOR-Verknüpfung) formulierte im 19. Jhdt. der englische Mathematiker Auguste De Morgan.

Erstes Morgansche Gesetz:

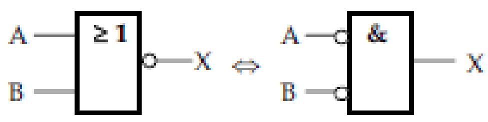
$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$



NAND-Funktion kann durch eine ODER-Funktion mit invertierten Eingängen ersetzt werden

Zweites Morgansche Gesetz:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$



NOR-Funktion kann durch eine UND-Funktion mit invertierten Eingängen ersetzt werden

Diese Regeln lassen auch auf mehr als zwei Eingangsvariable anwenden!

Anwendung finden die De Morganschen Theoreme auch, wenn eine Schaltung vollständig in NAND- oder in NOR-Technologie aufgebaut werden soll.

Übungen

1. Ermitteln Sie anhand der Wahrheitstabelle 1 die Gleichung für X in disjunktiver und in konjunktiver Normalform.

   Vereinfachen Sie mit den Regeln der Schaltalgebra nachvollziehbar (Schritt für Schritt) diese beiden Gleichungen und geben Sie das Ergebnis an.

C	B	A	X
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Wahrheitstabelle 1

2. Es ist ein Codewandler aufzubauen. Es soll der BCD-Code in den Excess-3-Code (oder auch Stibitz-Code genannt) umgewandelt werden.

   Fertigen Sie eine vollständige Wahrheitstabelle an.
   Ermitteln Sie für die beiden niederwertigen Bits (A, B) des Stibitz-Codes die zugehörigen Gleichungen und vereinfachen Sie diese nachvollziehbar mit Hilfe der Schaltalgebra.

   Überprüfen Sie ihr Ergebnis mittels KV-Diagramm.

   Zeichen Sie die zugehörigen Schaltungen.

3. Vereinfachen Sie die Schaltung für die Geschichte von Bauer, Wolf Ziege und Kohlkopf mit den Regeln der Schaltalgebra.

   Formen Sie die Gleichung so um, dass die Schaltung wahlweise in NAND- oder in NOR-Technologie aufgebaut werden kann.