Charakteristische Gleichung

Die charakteristische Gleichung eines Flipflops gibt an, wie sich dessen Ausgang Q aufgrund der Eingangssignale ändert. Diese Gleichung lässt sich anhand der Wahrheitstabelle und ggf. durch Vereinfachung mittels KV-Diagramm ermitteln.

RS-Flipflop

Die Wahrheitstabelle für das getaktete RS-Flipflop lautet:

Q	S	R	Q^+
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	X
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	X

Trägt man dies nun in ein KV-Diagramm ein, ergibt sich folgendes Bild:

Q^+	Q	Q	/Q	/Q
S	**1**	**X**	**X**	**1**
/S	**1**			
	/R	R	R	/R

Liest man nun die Gleichung für Q^+, so erhält man: $\mathbf{Q^+ = S \lor (Q \land \overline{R})}$ **Q⁺ = S ∨ (Q ∧ /R)**

D-Flipflop

D	Q^+
0	0
1	0

Das D-Flipflop hat eine besonders einfache charakteristische Gleichung, wie man aus der Wahrheitstabelle direkt entnehmen kann: **Q^+ = D**

JK-Flipflop

Die Wahrheitstabelle des JK-Flipflops ähnelt der, des RS-Flipflops. Allerdings verschwinden hier die beiden verbotenen Zustände, da bei diesen das JK-Flipflop im Toggle-Modus arbeitet: Aus „0“ wird „1“ und umgekehrt.

Q	J	K	Q^+
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Somit sieht auch das KV-Diagramm ähnlich aus:

Q^+	Q	Q	/Q	/Q
J	**1**		**1**	**1**
/J	**1**			
	/K	K	K	/K

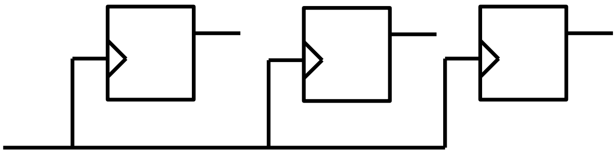
Die charakteristische Gleichung für das JK-Flipflop lautet: **Q^+ = (J ∧ /Q) ∨ (/K ∧ Q)**

Okay, schön und gut, aber für was ist das nun nützlich zu wissen....?

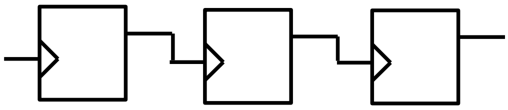
Anwendung der charakteristischen Gleichung

Ein wichtiges Einsatzgebiet von Flipflops sind Zähler. Hierbei unterscheidet man zwischen

- Synchronzähler; hier ist das Taktsignal für alle Flipflops das gleiche, und
- Asynchronzähler; bei diesen liefert ein Flipflopausgang das Taktsignal für das nachfolgende Flipflop der Zählerkette



Synchronzähler



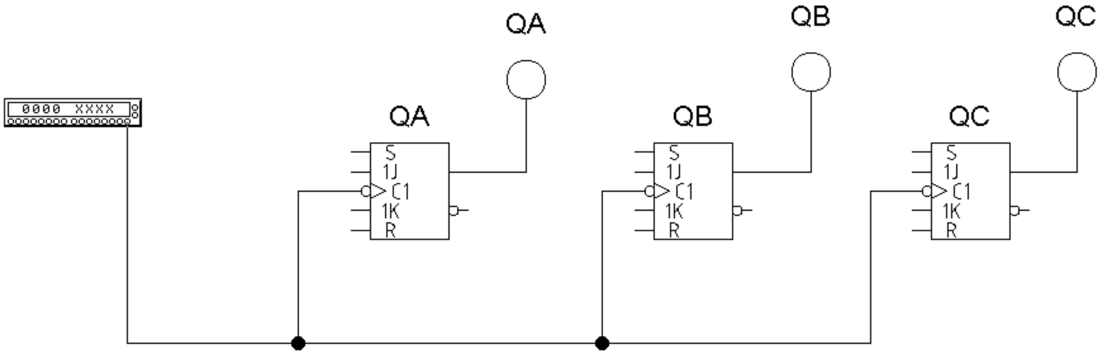
Asynchronzähler

Synchronzähler

Für den **Entwurf von Synchronzählern** mit beliebigem Zählverhalten, kann anhand der charakteristischen Gleichung ermittelt werden, welche Signale für die Eingänge des gewählten Flipflop-Typs erforderlich sind.

Beispiel

Synchroner 3-Bit Binärzähler mit JK-Flipflops



Es soll ein synchroner 3-Bit Binärzähler mit JK-Flipflops entworfen werden. Grundlage des Entwurfes bildet die Wahrheitstabelle für den Zähler. In dieser Wahrheitstabelle sind die Zählfolge und der jeweilige Folgezustand des Zählers niedergelegt.

Für jedes Ausgangssignal Q^+ ist nun eine der Normalformen zur Vereinfachung in ein KV-Diagramm einzutragen.

Zählerstand			Folgezustand		
Q_C	Q_B	Q_A	Q_C^+	Q_B^+	Q_A^+
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Koeffzientenvergleich

Für jedes Signal Q^+ wird nun die Gleichung ermittelt und diese mit der charakteristischen Gleichung des jeweiligen Flipflop-Typs verglichen. Bei diesem Vergleich ergibt sich nun das Signal für die Flipflop-Eingänge.

Gleichung für Q_A^+

Q_A^+	Q_A		$/Q_A$	
Q_B			1	1
$/Q_B$			1	1
	$/Q_C$	Q_C	Q_C	$/Q_C$

Die Gleichung für Q_A^+ lautet: $Q_A^+ = /Q_A$

Diese Gleichung wird nun mit der charakteristischen Gleichung für ein JK-Flipflop verglichen:

$\mathbf{Q^+ = (J \wedge /Q) \vee (/K \wedge Q)}$

$\mathbf{Q_A^+ = /Q_A}$

Hier ist nun ein wenig Denkarbeit gefordert ;-)

Vergleicht man den ersten Term der charakteristischen Gleichung mit der gerade ermittelten, kann man diesen wie folgt erweitern:

$\mathbf{Q_A^+ = (1 \wedge /Q_A)}$ → hieraus folgt, dass **J = 1** sein muss!

In der charakteristischen Gleichung existiert auch noch der zweite per ODER verknüpfte Term **$(/ K \wedge Q)$**. Dieser taucht in der Gleichung für **Q_A^+** überhaupt nicht auf. Demzufolge muss dieser Term gleich „0“ sein! Dieser Term wird „0“, wenn **/K gleich „0“** ist, da ja gemäß der Schaltalgebra **$(0 \wedge Q) = 0$** ist. → hieraus folgt, dass **K = 1** sein muss!

Vollständig erweitert, kann man das also so schreiben: $Q_A^+ = (1 \wedge /Q_A) \vee (0 \wedge Q_A)$

Gleichung für Q_B^+

Q_B^+	Q_A		$/Q_A$	
Q_B			1	1
$/Q_B$	1	1		
	$/Q_C$	Q_C	Q_C	$/Q_C$

In analoger (gleichartiger) Weise geht man nun bei den anderen Ausgangssignalen Q_B^+ und Q_C^+ vor. Machen wir mit Q_B^+ weiter. Das KV-Diagramm sieht wie folgt aus und es ergibt sich die Gleichung:

$\mathbf{Q_B^+ = (Q_A \wedge /Q_B) \vee (/Q_A \wedge Q_B)}$

$\mathbf{Q^+ = (J \wedge /Q) \vee (/K \wedge Q)}$

Durch den Vergleich erkennt man nun sofort:

$J = Q_A$ und **$/K = /Q_A$** → hieraus folgt, dass **$K = Q_A$** sein muss!

Gleichung für Q_C^+

Q_C^+	Q_A		$/Q_A$	
Q_B	1		1	
$/Q_B$		1	1	
	$/Q_C$	Q_C	Q_C	$/Q_C$

Aus dem KV-Diagramm lässt sich nun die Gleichung für Q_C^+ ablesen: $Q_C^+ = (Q_A \wedge Q_B \wedge /Q_C) \vee (/Q_A \wedge Q_C) \vee (/Q_B \wedge Q_C)$

Schaltalgebraisch lassen sich nun noch die beiden letzten Terme per Distributivgesetz zusammenfassen. Und der erste Term wurde ein wenig umgeschrieben:

$\mathbf{Q_C^+ = [(Q_A \wedge Q_B) \wedge /Q_C] \vee [(/Q_A \vee /Q_B) \wedge Q_C]}$

Vergleicht man nun beide Gleichungen:

$\mathbf{Q_C^+ = [(Q_A \wedge Q_B) \wedge /Q_C] \vee [(/Q_A \vee /Q_B) \wedge Q_C]}$

$\mathbf{Q^+ = (J \wedge /Q) \vee (/K \wedge Q)}$

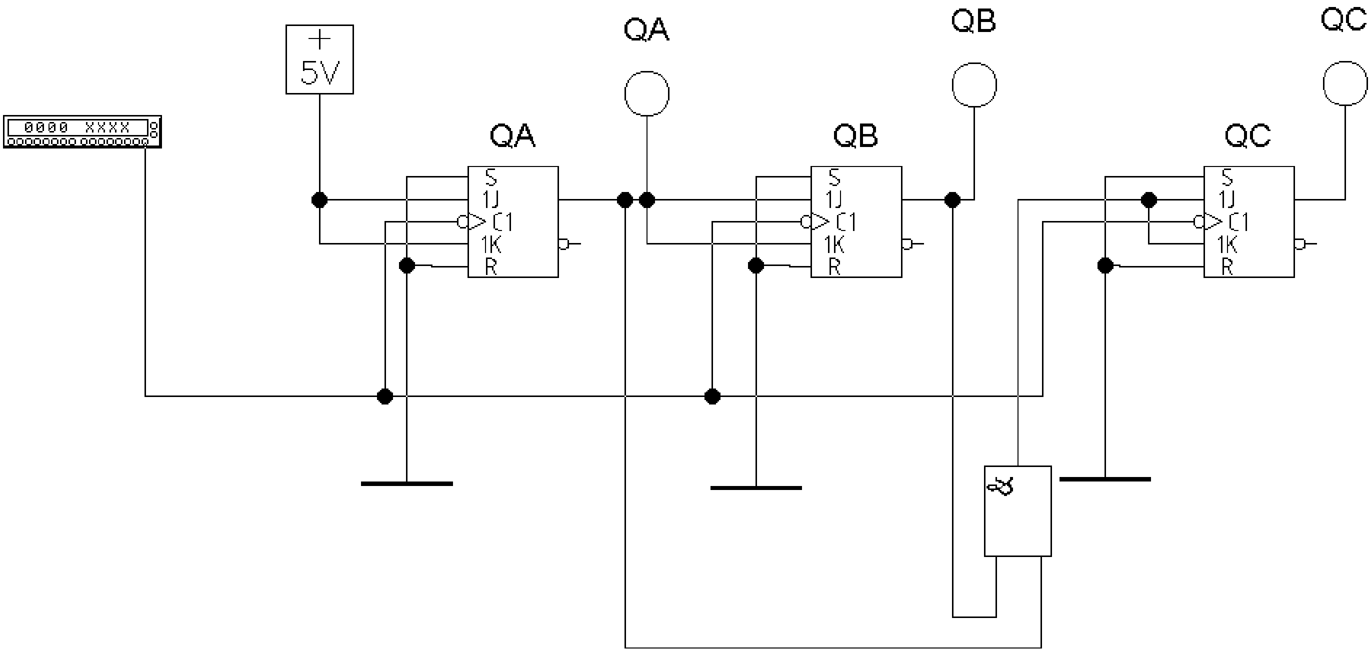
sieht man, dass $\mathbf{J = (Q_A \wedge Q_B)}$ und $\mathbf{/K = (/Q_A \vee /Q_B)}$ → hieraus folgt, dass $\mathbf{K = /(/Q_A \vee /Q_B)}$ sein muss!

Mit dem „De Morganschen Theorem" lässt sich das nun noch in eine UND-Verknüpfung umwandeln: $\mathbf{K = Q_A \wedge Q_B}$

Wunderbare Technik! J und K haben wiedermal den gleichen Wert. Somit ist die Belegung der Signale für J und K in den einzelnen Zählerstufen bekannt:

$J_A = 1$	$K_A = 1$
$J_B = Q_A$	$K_A = Q_A$
$J_C = Q_A \wedge Q_B$	$K_C = Q_A \wedge Q_B$

Nun kann der Zähler aufgebaut werden. Die asynchron arbeitenden Set- und Reset-Eingänge sind High-aktiv und werden daher auf „0" gelegt.



Übungen

1. Entwerfen Sie für einen elektronischen Würfel einen Zähler bis 6 (von 000 bis 101).
2. Entwerfen Sie für einen elektronischen Würfel einen Zähler bis 6 (von 001 bis 110).
3. Erweitern Sie den obigen Zähler um eine vierte Stufe, so dass ein Binärzähler bis 16 (0000 bis 1111) entsteht.
4. Entwerfen Sie einen Zähler bis 10.
   Es dürfen nur die Bitkombinationen von 0000 bis 1001 vorkommen. Für alle anderen Bitkombinationen können Sie die „don't Care" Zustände verwenden.