Zahlensysteme

Prinzipiell kann man zwei Arten von Zahlensystemen unterscheiden:

1. Nicht Stellenwertsysteme; wie z.B. die römische Zahlenschrift
2. Stellenwertsysteme; wie z.B. das gebräuchliche Dezimalsystem

Nicht Stellenwertsysteme

Römische Zahlschrift[1]

In der römischen Zahlschrift sind bestimmten römischen Buchstaben Zahlenwerte zugeordnet.

Zeichen	I	V	X	L	C	D	M	ↁ	ↂ
Wert	1	5	10	50	100	500	1000	5000	10.000

„Es handelt sich um eine additive Zahlschrift, mit ergänzender Regel für die subtraktive Schreibung bestimmter Zahlen, aber ohne Stellenwertsystem und ohne Zeichen für Null.“[2]

Beispiele

Stellenwertsysteme

Dezimalsystem

Im Dezimalsystem werden als Zahlzeichen die arabischen Ziffern 0, 1, 2, 3 … ,8 ,9 verwendet.

Jede dieser Ziffern bildet einen Wert, der von der jeweiligen Position in der Zahl abhängt.

Der Wert ergibt sich also aus der Stelle der betreffenden Ziffer.

Beispiel

1989 = 1 mal 1000 + 9 mal 100 + 8 mal 10 + 9 mal 1.

Die Ziffer „9“ besetzt hier die Hunderterstelle und die Einerstelle. Im ersten Fall steht sie also für den Wert der „Hunderter“ und im zweiten Fall für den Wert der „Einer“.

Den rechten Teil der Gleichung kann man auch anders schreiben, nämlich mit Hilfe von Zehnerpotenzen:

$$1989 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

In dieser Art und Weise lässt sich nun jedes Stellenwert-Zahlsystem konstruieren!

1 siehe auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Römische_Zahlschrift`

2 `https://de.wikipedia.org/wiki/Römische_Zahlschrift`, abgerufen am 30. August 2016

Dual- oder Binärsystem

Im dualen oder binären Zahlensystem werden nun, so wie es der Name des Systems schon ausdrückt: bi steht für zwei, nur zwei Ziffern verwendet: die Ziffern 0 und 1.

Eine gültige Binärzahl wäre also 1101.

Das Dualsystem bietet sich für Berechnungen in einem technischen System, das lediglich zwei Zustände kennt, förmlich an. Heutige Rechnersysteme arbeiten intern mit zwei Zuständen, denen jeweils eine der beiden Ziffern (0 oder 1) zugeordnet wird (z.B. keine Spannung vorhanden oder Spannung vorhanden; keine elektrische Ladung vorhanden oder elektrische Ladung vorhanden).

Welchen Wert hat nun diese Zahl im Dezimalsystem? Im Unterschied zum Dezimalsystem haben nun die Stellen eine Wertigkeit, die durch Zweierpotenzen ausgedrückt wird.

$$1101 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Die Zweierpotenzen lassen sich ausrechnen; es ergibt sich:

$$1101_2 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 8 + 4 + 1 = 13_{10}$$

Nach dieser Methode berechnet man den Wert von Dualzahlen im dezimalen System.

Um kenntlich zu machen, dass es sich bei der Dualzahl 1101 um eine solche handelt und nicht z.B. um die Dezimalzahl „Eintauseneinhundertundelf“ schreibt man um Verwechslungen zu vermeiden die Basis des jeweiligen Zahlensystems als Index an die Zahl.

Somit ist klar, das 1101 aus dem Binärsystem und 13 aus dem Dezimalsystem stammt.

Umrechnung vom Dezimalsystem in das Dualsystem

Dies erfolgt zumeist nach der Methode mit der Ganzzahl- bzw. Modulo-Division.

Bei einer Ganzzahl-Division bleibt ein Rest übrig, wenn das zu Teilende (Dividend) nicht ein Vielfaches des Teilers (Divisor) ist.

Beispiel: 42 geteilt durch 7 ist gleich 6. 42 ist der Dividend (das zu Teilende) und 7 ist der Divisor (der Teiler).

$\frac{42}{7} = 6$ In vielen Fällen bleibt ein Rest: 39 geteilt durch 7 ist gleich 5 Rest 4.

Eine Division, die als Ergebnis den Rest liefert, nennt man Modulo-Division. Als Operator schreibt man üblicherweise „mod“.

So liefert also „39 mod 7“ das Ergebnis „4“. $39 \; mod \; 7 = 4$

Die Umwandlung einer Dezimalzahl in eine Dualzahl erfolgt nach folgender Methode:

37	:	2	=	18	Rest	1	↑
18	:	2	=	9	Rest	0	
9	:	2	=	4	Rest	1	
4	:	2	=	2	Rest	0	
2	:	2	=	1	Rest	0	
1	:	2	=	0	Rest	1	

Liest man nun die Divisionsreste von unten nach oben, ergibt sich die Dualzahl: $100101_2 = 37_{10}$.

Die letzte Division, die durch geführt wird ist diejenige, bei der der Ganzzahlteil den Wert Null erhält.

Potenz	Wert
2^{-3}	0,125
2^{-2}	0,25
2^{-1}	0,5
2^{0}	1
2^{1}	2
2^{2}	4
2^{3}	
2^{4}	
2^{5}	
2^{6}	
2^{7}	
2^{8}	
2^{9}	
2^{10}	

Übungen

- Wandeln Sie die Zahlen jeweils in das Dezimal- oder Dualsystem um:
  1001_2, 1011001_2, 11011001_2
  87_{10}, 345_{10}, 972_{10}
- Ergänzen Sie die nebenstehende Tabelle mit den Wertigkeiten der Dualstellen.
- Wandeln Sie mit Hilfe der Tabelle in das Dezimalsystem um: $1011{,}101_2$ und $1110{,}011_2$
- In Computersystemen ist die Anzahl der Stellen rechts vom Komma (Dezimalstellen) beschränkt. Was lässt sich hieraus hinsichtlich der Genauigkeit von Dezimalzahlen schließen?

  ____

  ____

  ____

Oktalsystem

Ein ebenfalls in der EDV weitverbreitetes Zahlensystem ist das Oktalsystem. Dieses verfügt über 8 Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7. Mit diesen acht Ziffern lassen sich Oktalzahlen darstellen. Die Umrechnung erfolgt in analoger Weise zu Umrechnung von Dualzahlen in Dezimalzahlen.

Beispiel

$$725_8 = 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 7 \cdot 64 + 2 \cdot 8 + 5 \cdot 1 = 469_{10}$$

Umrechnung vom Dezimalsystem in das Oktalsystem

Auch hier kann in analoger Weise zum Dualsystem die Umrechnung erfolgen. In diesem Fall wird die Dezimalzahl durch 8 dividiert und der jeweilige Divisionsrest ermittelt

469_{10}	:	8	=	58	Rest	5
58	:	8	=	7	Rest	2
7	:	8	=	0	Rest	7

Auch hier wird solange durch acht dividiert, wie das Ganzzahlergebnis größer Null ist. Die letzte Division liefert also wie beim Dualsystem den Wert Null als Ganzzahlwert.

Was ist nun der Grund für die Benutzung eines Oktalsystems in der EDV?

Nun ja, eine Oktalziffer kann acht verschiedene Werte bilden; nämlich 0 bis 7. Um acht verschiedene Werte im Dualsystem zu bilden, benötigt man drei Binärstellen.

Diese sind: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 und 111. Rechnet man diese Dualzahlen um, ergeben sich die Werte 0 bis 7 und sie entsprechen genau den acht Oktalziffern.

Man kann also drei Binärstellen durch eine Oktalziffer ersetzen! Dies ermöglicht eine deutlich kompaktere und kürzere Schreibweise von langen Dualzahlen.

Eine Dualzahl lässt sich also sehr leicht und kurz in das Oktalsystem überführen, indem man beginnend bei der wert niedrigsten Binärstelle (2^0) Dreiergruppen bildet und für diese Dreiergruppen die jeweilige Oktalziffer schreibt.

Beispiel

$$10011101_2 = 10\ \ 011\ \ 101 = 010\ \ 011\ \ 101 = 2\ \ 3\ \ 5 = 235_8$$

Umgekehrt lassen sich Oktalzahlen auf die umgekehrte Weise als Dualzahlen schreiben.

Beispiel

$$6073_8 = 6\ \ 0\ \ 7\ \ 3 = 110\ \ 000\ \ 111\ \ 011 = 110000111011_2$$

Übungen

- Wandeln Sie die Zahlen jeweils in das Dezimal-, Oktal- oder Dualsystem um.

Dezimal	Dual	Oktal
327		
	101001101	
		423

Hexadezimalsystem (Sedezimalsystem)

Weitaus häufiger als das Oktalssystem, wird in der EDV das Hexadezimalsystem verwendet. Dieses System verwendet 16 Ziffern, die als Zahlzeichen 0 bis 9 und die Buchstaben A bis F (für die Werte 10 bis 15) geschrieben werden.

Eine gültige Hexadezimalzahl und deren Umrechnung in das Dezimalsystem wäre z.B.

$$\begin{aligned} CAFE_{16} &= C\cdot 16^3 + A\cdot 16^2 + F\cdot 16^1 + E\cdot 16^0 \\ &= 12\cdot 16^3 + 10\cdot 16^2 + 15\cdot 16^1 + 14\cdot 16^0 \\ &= 12\cdot 4096 + 10\cdot 256 + 15\cdot 16 + 14\cdot 1 \\ &= 49152 + 2560 + 240 + 14 \\ &= 51966_{10} \end{aligned}$$

Umrechnung vom Dezimalsystem in das Hexadezimalsystem

In diesem Fall wird durch 16 dividiert:

469_{10}	:	16	=	29	Rest	5	≡	5
29	:	16	=	1	Rest	13		D
1	:	16	=	0	Rest	1		1

469_{10} im Dezimalsystem entspricht also $1D5_{16}$ im Hexadezimalsystem.

Weshalb nun noch das Hexadezimalsystem? Mit vier Binärstellen können die Dezimalzahlen von 0 bis 15 gebildet werden (0000, 0001, 0010, 0011 ….1100, 1101, 1110 und 1111). Jeder dieser Vierergruppen lässt sich also eine entsprechende Hexadezimal-Ziffer zuordnen und somit lassen sich sehr lange Dualzahlen kompakter schreiben.

Die Umrechnung vom Dualsystem in das Hexadezimalsystem erfolgt sehr einfach durch das Bilden von Vierergruppen:

$$\begin{aligned} 110111001_2 &= 0001\ \ 1011\ \ 1001 \\ &= \quad 1 \qquad B \qquad 9 \\ &= 1B9_{16} \end{aligned}$$

Umgekehrt, vom Dualsystem in das Hexadezimalsystem:

$$\begin{aligned} 1B9_{16} &= \quad 1 \qquad B \qquad 9 \\ &= 0001\ \ 1011\ \ 1001 \\ &= 110111001_2 \end{aligned}$$

Übung

- Wandeln Sie um in das Dezimal-, Dual- und Oktalsystem:
  $3D_{16}$, $4BA_{16}$, $AFFE_{16}$