Darstellung von vorzeichenlosen Ganzzahlen

Für die Darstellung von Ganzzahlen werden in einem Rechnersystem typisch eine bestimmte Anzahl von Bits verwendet. Der „Standard-Datentyp" für Ganzzahlen ist der der Datentyp Integer.

Die Anzahl richtet sich üblicherweise nach der „Breite" des Datenbus, d.h. dessen Anzahl Bits. So werden auf einem 16-Bit System Ganzzahlen mit 16 Bit dargestellt; auf einem 32-Bit System sind es 32 Bit. Bei 64-Bit Systemen werden für den Datentyp Integer typisch trotzdem nur 32 Bit verwendet.

Der Wertebereich beträgt damit 0 bis $2^N - 1$, wobei N für die Anzahl der Bit steht.

Beispiele

N = 16 → Wertebereich 0….$2^{16} - 1$; d.i. 0 bis 65.535

N = 32 → Wertebereich 0….$2^{32} - 1$; d.i. 0 bis 4.294.967.295

Addition von Dualzahlen

Die Addition von Dualzahlen erfolgt nach den selben Prinzip, wie bei den Dezimalzahlen.

Die Dualzahlen werden stellenweise, beginnend bei der wertniedrigsten Stelle, addiert. Entsteht bei der Addition von Dezimalzahlen in einer Stelle ein Wert größer 9, wird in der nächsten Stelle ein entsprechender Übertrag hinzugefügt.

Im Dualsystem entsteht ein Übertrag, wenn der Wert der stellenweisen Addition größer 1 ist.

Die Additionsregeln für eine bitweise Addition lassen sich sehr leicht herleiten.

- 0 + 0 ergibt die Summe 0 und keinen Übertrag.
- 0 + 1 ergibt in der Summe 1 ohne Übertrag.
- Da die Addition kommutativ ist, gilt für 1 + 0 das selbe.
- Im Fall 1 + 1 ergibt sich in der Summe der Wert 0 und ein Übertrag von 1.

Übersetzt man die duale Addition 1 + 1 in das Dezimalsystem, ergibt sich der Wert 2.
Stellt man den Wert 2 binär dar, ist dies 10_2.

Rechenregeln für die Addition

Bit A	Bit B	Übertrag A + B	Summe A + B
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

```
Dezimalsystem
    885
 +  253
Ü:  1
S: 1138
```

```
Dualsystem
     1010
  +  1100
Ü:  1
S:  10110
```

Wird bei den Dualzahlen der Wertebereich, d.h. die Anzahl der zur Verfügung stehenden Stellen, überschritten, entsteht ein sogenannter Überlauf, wodurch ein fehlerhaftes Ergebnis entsteht. Dieser Überlauf wird in der CPU in einem sogenannten „*Carry-Bit*" festgehalten.

Subtraktion von Dualzahlen

Auch hier liegt das gleiche Prinzip wie bei den Dezimalzahlen zugrunde.

Die Dualzahlen werden stellenweise, beginnend bei der wertniedrigsten Stelle, subtrahiert. Entsteht bei der Subtraktion von Dezimalzahlen in einer Stelle ein Wert kleiner 0, wird in der nächsten Stelle „geborgt“.

Im Dualsystem wird dann eine „1“ „geborgt“.

Die Subtraktionsregeln für eine bitweise Subtraktion lassen sich sehr leicht herleiten.

- 0 - 0 ergibt die Differenz 0 ohne „borgen“ in der nächsten Stelle.
- 1 - 0 ergibt in der Differenz 1 ohne „borgen“.
- 1 – 1 ergibt in der Differenz 0 ohne „borgen“.
- 0 - 1 ergibt in der Differenz der Wert 1 und ein „borgen“ von 1 in der nächsten Stelle.

Übersetzt man die duale Subtraktion 0 - 1 in das Dezimalsystem, ergibt sich der Wert 1 in der Differenz, da durch das „Borgen“ eigentlich 10 – 1 gerechnet wird; also 2 – 1.

Das „Borgen“ ist ein negativer Übertrag von -1.

Rechenregeln für die Subtraktion

Bit A	Bit B	Übertrag A - B	Differenz A - B
0	0	0	0
0	1	-1	1
1	0	0	1
1	1	0	0

```
Dezimalsystem
     885
 -   293
-Ü:  1
 D:  592
```

```
Dualsystem
        1100
     -  1010
-Ü:        1
 D:     0010
```

Wird bei den Dualzahlen der Wertebereich, d.h. die Anzahl der zur Verfügung stehenden Stellen, überschritten, entsteht ein sogenannter Unterlauf, wodurch ein fehlerhaftes Ergebnis entsteht. Dieser Unterlauf wird in der CPU in einem sogenannten Carry-Bit festgehalten.

Übungen

Addieren und subtrahieren Sie folgende Dualzahlen. Zur Probe übersetzen Sie die Dualzahlen und Ihr Ergebnis in das Dezimalsystem.

```
     10101100
  +  00010011
Ü:
S:
```

```
     10101111
  +  00110011
Ü:
S:
```

```
     10101111
  +  10100010
Ü:
S:
```

```
     11001101
  +  11001101
Ü:
S:
```

```
     10111011
  -  00010011
-Ü:
 D:
```

```
     10101111
  -  00110011
-Ü:
 D:
```

```
     10101111
  -  10100010
-Ü:
 D:
```

```
     11001101
  -  01111101
-Ü:
 D:
```

Darstellung von vorzeichenbehafteten Ganzzahlen

Um bei Ganzzahlen auch negative Zahlen darstellen zu können, muss in irgendeiner Form das Vorzeichen dieser Zahl gespeichert werden.

Eine erste Idee könnte sein, ein Bit als Vorzeichenbit zu verwenden.
Angenommen, das Rechenwerk hätte eine Größe von 8 Bit, dann würde das werthöchste Bit (MSB[1]) als Vorzeichenbit verwendet, wobei der Bitwert 0 eine positive Zahl und der Bitwert 1 eine negative Zahl darstellt.
Die verbleibenden 7 Bit würden den Wert der Zahl repräsentieren.
Somit wäre der Zahlenbereich ± 127 (± 2^7 - 1).

Darstellung der Zahl +97

0	1	1	0	0	0	0	1
Vz	Wert						

Darstellung der Zahl -97

1	1	1	0	0	0	0	1
Vz	Wert						

Wendet man allerdings die bereits besprochenen Additionsregeln an, ergeben sich hierbei fehlerhafte Ergebnisse. Für eine Addition von vorzeichenbehafteten Dualzahlen wären neue Regeln notwendig. In diesem Fall müssten die Rechenwerke modifiziert werden.
Abgesehen hiervon würden bei dieser Darstellung ein +0 und eine -0 existieren.

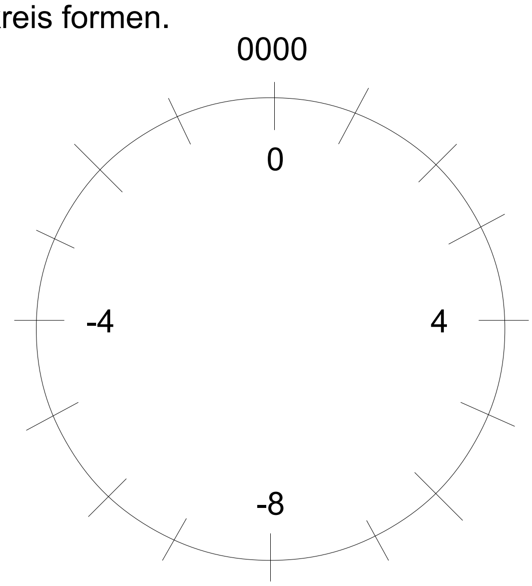
Daher wird tatsächlich eine andere Darstellungsform verwendet!

Aus voran gegangenen Schuljahren kennen Sie sicher noch den Zahlenstrahl. Die positiven und negativen ganzen Zahlen sind in gleichen Abständen auf dem Zahlenstrahl aufgetragen.

Angenommen, das Rechenwerk ist 4 Bit breit. Dann lassen sich 2^4 = 16 Zustände und damit 16 verschiedene Zahlen festlegen:

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7

Lassen Sie uns den Zahlenstrahl nun zu einem Zahlenkreis formen.



Übung

Ergänzen Sie am Zahlenkreis innen die fehlenden positiven und negativen Ganzzahlen.

Tragen Sie außen am Zahlenkreis die vierstelligen Binärkombinationen für die Zahlen von 1 bis +7 auf.

Führen Sie die Binärkombinationen am Zahlenkreis für die Umlaufrichtung im Uhrzeigersinn fort.

1 Most Significant Bit

Das Komplement[2]

Im Dezimalsystem existiert das sogenannte Neuner-Komplement bzw. Zehner-Komplement.

Mit Hilfe des Zehner-Komplements kann eine Subtraktion auf eine Addition zurückgeführt werden. Dieses Prinzip kann auch auf das Dualsystem übertragen werden. Sehen wir es uns aber zunächst im Dezimalsystem an.

Es soll berechnet werden: 387[3] – 153. Die Differenz ergibt sich zu 234. Okay...soweit so gut :)

Vorausgesetzt wird, dass die Anzahl der Stellen einer Zahl festgelegt ist! In den folgenden Beispielen sollen dies dreistelligen Zahlen sein können (von „000“ bis „999“)

Neuner-Komplement

Das Neuner-Komplement ist nun die Ergänzung einer Dezimalstelle auf die Zahl 9. Bilden wir nun stellenweise das Neuner-Komplement für die Zahl 153. In der Einerstelle ist dies die „6“, in der Zehnerstelle ist dies die „4“ und in der Hunderterstelle die „8“. Somit lautet das Neuner-Komplement 846

Zehner-Komplement

Dies ist nun ganz einfach! Das Zehner-Komplement ist das Neuner-Komplement + 1. Das Zehner-Komplement für das Beispiel lautet somit 847.

Was hat das nun mit einer Subtraktion bzw. Addition zu tun? Ganz einfach! Addiere ich zum Subtrahenden das Zehner-Komplement, ergibt sich ebenfalls die gewünschte Differenz.

```
   387
 - 153
   234
```

```
   387
 + 847
Ü: 111
D: 1234
```

Wie man sieht, entsteht als Differenz der Wert 1234.
Da aber die Stellenanzahl auf drei Stellen begrenzt ist, entfällt die Tausenderstelle und die Differenz lautet 234.

Eine Subtraktion lässt also auf eine Addition zurückführen!

Einer-Komplement

Im Dualsystem ist das Einer-Komplement die Ergänzung einer Stelle hin zur „1“. Legen wir zuerst die Anzahl der Binärstellen fest. Legen Sie hierzu wiederum unser **vierstelliges Rechenwerk** zugrunde. Mögliche Dualzahlen sind somit „0000“ bis „1111“.

Als Beispiel soll berechnet werden: 1010 – 0011. Das Ergebnis lautet somit 0111.

Das Einer-Komplement des Minuenden lautet „1100“.

Zweier-Komplement

Das Zweier-Komplement ist nun das Einer-Komplement + 1. Somit lautet das Zweier-Komplement unseres Minuenden 1101 (1100 + 0001).

```
    1010
 -  0011
Ü:  111
D:  0111
```

```
    1010
 +  1101
Ü: 1
D: 10111
```

Nun kann die Subtraktion wiederum auf eine Addition zurück geführt werden, in dem man zum Subtrahend das Zweier-Komplement addiert.

Eventuelle Überträge in eine nicht existente 5. Stelle bleiben hierbei ebenfalls unberücksichtigt!

Übungen

Berechnen Sie im Dualsystem mit acht Stellen mittels Komplementbildung:
73 ± (-25)   195 ± 125)   212 ± (-132)   57 ± (-125)

2 lat. complementum = „Ergänzung“, „Vervollständigung[smittel]“ – complere = „erfüllen“, „ergänzen“

3 Zur Erinnerung am Beispiel 387 – 153 = 234: Subtrahend – Minuend = Differenz